Przestrzenie mieszane Lebesgue'a

Michał Dymek
E-mail: m.dymek@student.mini.pw.edu.pl

Wydział MiNI PW
Otwarte seminarium z równań różniczkowych cząstkowych
21.10.2021

1 Przestrzenie Lebesgue'a ze zmiennym wykładnikiem

W całym referacie zakładać będziemy, że $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ jest zbiorem mierzalnym w sensie Lebesgue'a. Dla dowolnego zbioru $E \subset \Omega$ i dla funkcji mierzalnej $p : \Omega \to (0, +\infty]$ przyjmujemy oznaczenia

$$p_-(E) = \operatorname*{ess\,inf}_{x \in E} p(x), \qquad p_+(E) = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in E} p(x).$$

Ponadto jeżeli $E = \Omega$, to będziemy pisać $p_+ = p_+(E)$ i $p_- = p_-(E)$.

Definicja 1.1. Dowolną funkcję mierzalną $p : \Omega \to (0, +\infty]$ taką, że $p_- > 0$ będziemy nazywać *zmiennym wykładnikiem*. Zbiór wszystkich zmiennych wykładników na zbiorze Ω oznaczamy jako $\mathcal{P}_0(\Omega)$.

Definicja 1.2. Dla $t \geqslant 0$ określmy funkcję

$$\varphi_p(t) := \begin{cases} t^p & \text{dla } p \in (0, +\infty), \\ 0 & \text{dla } p = +\infty \text{ i } t \leqslant 1, \\ +\infty & \text{dla } p = +\infty \text{ i } t > 1. \end{cases}$$

Niech $p \in \mathcal{P}_0(\Omega)$. *Przestrzenią Lebesgue'a ze zmiennym wykładnikiem* $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ nazywamy przestrzeń takich funkcji mierzalnych $f : \Omega \to \mathbb{R}$, dla których istnieje liczba $\lambda > 0$ taka, że

$$\rho_{p(\cdot)}(\lambda f) := \int_\Omega \varphi_{p(x)}(\lambda |f(x)|) \, \mathrm{d}x < +\infty.$$

Ponadto, dwie funkcje z przestrzeni $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ uznajemy za równe, jeśli są równe prawie wszędzie.

Uwaga 1.3. Jeżeli $p_+ < +\infty$, to definicja przestrzeni $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ upraszcza się. Wówczas prawdą jest, że $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\int_\Omega |f(x)|^{p(x)} \, \mathrm{d}x < +\infty.$$

Twierdzenie 1.4. Przestrzeń Lebesgue'a ze zmiennym wykładnikiem $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ jest przestrzenią kwazi-Banacha z kwazi-normą Luxemburga

$$\begin{aligned} ||f||_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} :&= \inf \left\{ \lambda > 0 : \rho_{p(\cdot)}\left(\frac{f}{\lambda}\right) \leqslant 1 \right\} = \\ &= \inf \left\{ \lambda > 0 : \int_{\Omega_0} \left| \frac{f(x)}{\lambda} \right|^{p(x)} \mathrm{d}x \leqslant 1 \text{ oraz } |f(x)| \leqslant \lambda \text{ dla prawie wszystkich } x \in \Omega_\infty \right\}, \end{aligned}$$

gdzie

$$\Omega_0 := \{x \in \Omega : p(x) < +\infty\}, \qquad \Omega_\infty = \Omega \setminus \Omega_0.$$

Ponadto, jeśli $p_- \geqslant 1$, to przestrzeń ta staje się przestrzenią Banacha. Jeśli zaś p jest stałe, to $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ jest klasyczną przestrzenią Lebesgue'a.

Uwaga 1.5 (Własność kuli jednostkowej). Dla dowolnej funkcji $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ zachodzi równoważność

$$\rho_{p(\cdot)}(f) \leqslant 1 \iff ||f||_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \leqslant 1.$$

Przestrzenie Lebesgue'a ze zmiennym wykładnikiem mają wiele podobnych własności do klasycznych przestrzeni Lebesgue'a. Wymienimy kilka z nich.

(i) Przestrzeń $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ jest ośrodkowa wtedy i tylko wtedy, gdy $p_+ < +\infty$.

(ii) Jeżeli $1 \leqslant p_- \leqslant p_+ < +\infty$, to $\left(L^{p(\cdot)}(\Omega)\right)^* = L^{p'(\cdot)}(\Omega)$, gdzie p' jest wykładnikiem sprzężonym do p.

(iii) Jeśli $1 < p_- \leqslant p_+ < +\infty$, to przestrzeń ze zmiennym wykładnikiem jest refleksywna.

Jednakże, pomiędzy przestrzeniami ze zmiennym wykładnikiem i klasycznymi są też istotne różnice. Podamy niżej kilka z nich.

(i) Operator przesunięcia $T_h f(x) := f(x+h)$, gdzie $f \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ i $h \in \mathbb{R}^n$ nie jest ograniczony na przestrzeni $L^{p(\cdot)}(\Omega)$. W przestrzeni ze stałym wykładnikiem zaś jest on ograniczony.

(ii) Nierówność Younga $||f * g||_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \leqslant ||f||_{L^1(\mathbb{R}^n)} \cdot ||g||_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}$, $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ w ogólności nie jest prawdziwa. Z kolei w przypadku, gdy p jest stale i $p \in [1, +\infty]$, nierówność ta zachodzi.

2 Własności przestrzeni mieszanych Lebesgue'a

Zaczniemy od zdefiniowania przestrzeni mieszanych Lebesgue'a $\ell^{q(\cdot)}(L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n))$. Pierwszy raz pojawiły się one w pracy [2] z 2010 roku, gdzie były istotnym składnikiem budulcowym w definiowaniu przestrzeni Biesowa ze zmiennym wykładnikiem $B^{\alpha(\cdot)}_{p(\cdot),q(\cdot)}$.

Definicja 2.1. Niech $p, q \in \mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n)$. Dla dowolnego ciągu funkcji mierzalnych $(f_k) \subset L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ definiujemy następujący funkcjonał

$$\rho_{\ell^{q(\cdot)}(L^{p(\cdot)})}\left((f_k)\right) := \sum_{k=1}^{\infty} \inf \left\{ \lambda_k > 0 : \rho_{p(\cdot)}\left(\frac{f_k}{\lambda_k^{\frac{1}{q(\cdot)}}} \right) \leqslant 1 \right\}.$$

Ponadto, przyjmujemy tu konwencję, że $\lambda^{\frac{1}{\infty}} = 1$. *Przestrzenią mieszaną Lebesgue'a* $\ell^{q(\cdot)}(L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n))$ nazywamy przestrzeń składającą się z takich ciągów funkcji mierzalnych $(f_k) \subset L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$, dla których istnieje liczba $\mu > 0$, że

$$\rho_{\ell^{q(\cdot)}(L^{p(\cdot)})}\left(\mu\left(f_k\right)\right) < +\infty.$$

Twierdzenie 2.2. Dla dowolnych $p, q \in \mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n)$ przestrzeń $\ell^{q(\cdot)}(L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n))$ jest przestrzenią kwazi-unormowaną z następującą kwazi-normą Luxemburga

$$||(f_k)||_{\ell^{q(\cdot)}(L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n))} := \inf\left\{\mu > 0 : \rho_{\ell^{q(\cdot)}(L^{p(\cdot)})}\left(\frac{(f_k)}{\mu}\right) \leqslant 1\right\}.$$

Dla przestrzeni mieszanych Lebesgue'a zachodzi analogiczna własność kuli jednostkowej jak dla przestrzeni ze zmiennym wykładnikiem. Co więcej, okazuje się, że przy pewnych założeniach na wykładniki mieszana przestrzeń Lebesgue'a jest klasyczną przestrzenią unormowaną. Warunki te podali Kempka i Vybíral w 2013 roku w pracy [6].

Twierdzenie 2.3 (H. Kempka, J. Vybíral, 2013). Niech $p, q \in \mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n)$ będą wykładnikami takimi, że $p_-, q_- \geqslant 1$ oraz spełniony jest przynajmniej jeden z następujących warunków:

(i) funkcja q jest stała;

(ii) dla prawie wszystkich $x \in \mathbb{R}^n$ spełniona jest nierówność $q(x) \leqslant p(x)$;

(iii) dla prawie wszystkich $x \in \mathbb{R}^n$ zachodzi nierówność $\dfrac{1}{p(x)} + \dfrac{1}{q(x)} \leqslant 1$.

Wtedy $\ell^{q(\cdot)}(L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n))$ jest przestrzenią unormowaną wraz z normą Luxemburga $||\cdot||_{\ell^{q(\cdot)}(L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n))}$.

Dla wykładników p, q spełniających dodatkowe założenia definicja przestrzeni mieszanej Lebesgue'a znacząco upraszcza się. Mianowicie, prawdziwe jest następujące stwierdzenie.

Stwierdzenie 2.4. Niech $p, q \in \mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n)$. Wtedy prawdziwe są punkty (i)–(iii).

(i) Jeśli $q_+ < +\infty$, to

$$\rho_{\ell^{q(\cdot)}(L^{p(\cdot)})}((f_k)) = \sum_{k=1}^{\infty} \left|\left||f_j|^{q(\cdot)}\right|\right|_{L^{\frac{p(\cdot)}{q(\cdot)}}(\mathbb{R}^n)}.$$

dla każdego ciągu $(f_k) \subset L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$. Ponadto, $(f_k) \in \ell^{q(\cdot)}(L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n))$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\rho_{\ell^{q(\cdot)}(L^{p(\cdot)})}((f_k)) = \sum_{k=1}^{\infty} \left|\left||f_j|^{q(\cdot)}\right|\right|_{L^{\frac{p(\cdot)}{q(\cdot)}}(\mathbb{R}^n)} < +\infty.$$

(ii) Jeżeli q jest funkcją stałą, to

$$||(f_k)||_{\ell^{q(\cdot)}(L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n))} = \left|\left|||f_k||_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\right|\right|_{\ell^q}$$

dla dowolnego ciągu $(f_k) \subset L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$. Dodatkowo, jeśli $q < +\infty$, to

$$\rho_{\ell^{q(\cdot)}(L^{p(\cdot)})}((f_k)) = \sum_{k=1}^{\infty} ||f_k||^q_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}.$$

(iii) Dla dowolnej funkcji $f \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ mamy

$$||f||_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} = ||(f, 0, 0, \ldots, 0, \ldots)||_{\ell^{q(\cdot)}(L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n))}.$$

Innymi słowy, przestrzeń Lebesgue'a ze zmiennym wykładnikiem $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ zanurza się izometrycznie w $\ell^{q(\cdot)}(L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n))$.

Znane są również inne własności przestrzeni mieszanych Lebesgue'a. W pracy [4] udowodniono następujące twierdzenia.

Twierdzenie 2.5 (A. Ghorbanalizadeh, P. Górka, 2020). Niech $p, q \in \mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n)$. Wtedy przestrzeń $\ell^{q(\cdot)}(L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n))$ jest przestrzenią kwazi-Banacha.

Twierdzenie 2.6 (A. Ghorbanalizadeh, P. Górka, 2020). Niech $p, q \in \mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n)$ będą wykładnikami takimi, że $p_+, q_+ < +\infty$. Wtedy przestrzeń $\ell^{q(\cdot)}(L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n))$ jest ośrodkowa.

Wymienione twierdzenia stanowią cały stan wiedzy na temat mieszanych przestrzeni Lebesgue'a do 2020 roku. W 2021 udowodniliśmy zaś nowe twierdzenie charakteryzujące zbiory prezwarte w przestrzeniach $\ell^{q(\cdot)}(L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n))$. Jest ono uogólnieniem znanego już twierdzenia o zwartości w przestrzeniach Lebesgue'a ze zmiennym wykładnikiem, które przedstawimy niżej. Zanim jednak do tego przejdziemy, musimy wprowadzić klasę odpowiednio regularnych wykładników. Są to tak zwane wykładniki logarytmicznie-hölderowsko ciągłe.

Definicja 2.7. Powiemy, że funkcja $p : \Omega \to \mathbb{R}$ jest *lokalnie logarytmicznie-hölderowsko ciągła*, jeżeli istnieje stała $A_0 > 0$ taka, że dla $x, y \in \Omega$ zachodzi

$$|p(x) - p(y)| \leqslant \frac{A_0}{\ln\left(\mathrm{e} + \frac{1}{|x-y|}\right)}.$$

Ponadto, mówimy, że funkcja p ma *logarytmicznie-hölderowski zanik w nieskończoności*, jeżeli istnieje stała $A_\infty > 0$ oraz liczba $p_\infty \in \mathbb{R}$ takie, że dla każdego $x \in \Omega$ zachodzi

$$|p(x) - p_\infty| \leqslant \frac{A_\infty}{\ln(\mathrm{e} + |x|)}.$$

Funkcję p nazwiemy *globalnie logarytmicznie-hölderowsko ciągłą*, jeżeli jest lokalnie logarytmicznie-hölderowsko ciągła i ma logarytmicznie-hölderowski zanik w nieskończoności. Na zbiorach ograniczonych nie trzeba sprawdzać zaniku w nieskończoności.

Definiujemy następującą klasę funkcji

$$\mathcal{P}_0^{\log}(\Omega) := \left\{ p \in \mathcal{P}_0(\Omega) : \text{funkcja } \frac{1}{p} \text{ jest globalnie logarytmicznie-hölderowsko ciągła} \right\}.$$

W 2017 roku udowodnione zostało następujące uogólnienie twierdzenia Riesza-Kołmogorowa charakteryzującego zbiory prezwarte w przestrzeniach Lebesgue'a ze stałym wykładnikiem.

Twierdzenie 2.8 (R. Bandaliyev, P. Górka, 2017). Niech $p \in \mathcal{P}_0^{\log}(\mathbb{R}^n)$ będzie wykładnikiem takim, że $0 < p_- \leqslant p_+ < +\infty$. Wówczas rodzina $\mathcal{F} \subset L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ jest całkowicie ograniczona (prezwarta) wtedy i tylko wtedy gdy:

(i) rodzina $\mathcal{F}$ jest ograniczona;

(ii) spełniony jest warunek

$$\exists_{0<s<p_-} \lim_{r\to 0_+} \sup_{f\in\mathcal{F}} \int_{\mathbb{R}^n} \left(⨍_{B(x,r)} |f(x) - f(y)|^s \,\mathrm{d}y \right)^{\frac{p(x)}{s}} \mathrm{d}x = 0;$$

(iii) rodzina $\mathcal{F}$ ma jednakowy zanik w nieskończoności, to znaczy

$$\lim_{R\to\infty}\sup_{f\in\mathcal{F}}\int_{\mathbb{R}^n\setminus B(0,R)}|f(x)|^{p(x)}\,\mathrm{d}x=0.$$

Uwaga 2.9. W przypadku, gdy $p_-\geqslant 1$, to warunek (ii) z twierdzenia 2.8 można zastąpić warunkiem

(ii')

$$\lim_{r\to 0^+}\sup_{f\in\mathcal{F}}\int_{\mathbb{R}^n}\left|f(x)-(f)_{B(x,r)}\right|^{p(x)}\mathrm{d}x=0,$$

gdzie

$$(f)_{B(x,r)}:=\fint_{B(x,r)}f(y)\mathrm{d}y.$$

Uwaga 2.10. Jeżeli w twierdzeniu 2.8 założymy jedynie, że $p\in\mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n)$, to warunki (i)–(iii) dalej implikują prezwartość rodziny $\mathcal{F}$. Założenie o regularności wykładnika było potrzebne tylko po to, by w dowodzie konieczności warunków (i)–(iii) skorzystać z twierdzenia Hardy'ego-Littlewooda o funkcjach maksymalnych.

Zanim sformułujemy i udowodnimy twierdzenie o zwartości w przestrzeniach mieszanych Lebesgue'a, podamy kilka stwierdzeń i lematów, których będziemy używać w jego dowodzie.

Lemat 2.11. Niech $p,q\in\mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n)$ i $(f_i)_{i=1}^{\infty}\in\ell^{q(\cdot)}(L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n))$. Wtedy dla dowolnego $j\in\mathbb{N}$ mamy

$$||f_j||_{p(\cdot)}\leqslant||(f_j)||_{\ell^{q(\cdot)}(L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n))}$$

Lemat 2.12. [4] Niech $p,q\in\mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n)$ i niech $(f_k)\subset L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ będzie ciągiem funkcji mierzalnych zbieżnym do $f\in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ w kwazi-normie $||\cdot||_{p(\cdot)}$. Wtedy zachodzi nierówność

$$\inf\left\{\lambda>0:\rho_{p(\cdot)}\left(\frac{f}{\lambda^{\frac{1}{q(\cdot)}}}\right)\leqslant 1\right\}\leqslant\liminf_{k\to\infty}\inf\left\{\lambda(k)>0:\rho_{p(\cdot)}\left(\frac{f_k}{\lambda(k)^{\frac{1}{q(\cdot)}}}\right)\leqslant 1\right\}$$

Stwierdzenie 2.13. [3] Niech $p\in\mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n)$ i niech $f\in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$. Wówczas

$$\min\left\{\left(\rho_{p(\cdot)}(f)\right)^{\frac{1}{p_-}},\left(\rho_{p(\cdot)}(f)\right)^{\frac{1}{p_+}}\right\}\leqslant||f||_{p(\cdot)}\leqslant\min\left\{\left(\rho_{p(\cdot)}(f)\right)^{\frac{1}{p_-}},\left(\rho_{p(\cdot)}(f)\right)^{\frac{1}{p_+}}\right\}.$$

Stwierdzenie 2.14. Niech $p,q\in\mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n)$ i niech $(f_j),(g_j)\subset L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ będą ciągami funkcji mierzalnych. Przypuśćmy, że dla każdego $j\in\mathbb{N}$ zachodzi nierówność $0\leqslant f_j\leqslant g_j$. Wówczas

$$||(f_j)||_{\ell^{q(\cdot)}(L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n))}\leqslant||(g_j)||_{\ell^{q(\cdot)}(L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n))}.$$

Twierdzenie 2.15 (Hardy'ego-Littlewooda o funkcjach maksymalnych w $L^{p(\cdot)}$). [1] Niech $p\in\mathcal{P}_0^{\log}(\mathbb{R}^n)$ będzie wykładnikiem takim, że $p_->1$. Wtedy istnieje stała $C>0$ taka, że dla każdej funkcji $f\in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ zachodzi nierówność

$$||\mathcal{M}f||_{p(\cdot)}\leqslant\frac{Cp_-}{p_--1}||f||_{p(\cdot)},$$

gdzie

$$\mathcal{M}f(x) := \sup_{r>0} \fint_{B(x,r)} |f(y)| \, \mathrm{d}y$$

oznacza funkcję maksymalną Hardy'ego-Littlewooda.

Następujący fakt jest bezpośrednim wnioskiem z twierdzenia 2.15.

Wniosek 2.15.1. [3] Niech $p \in \mathcal{P}_0^{\log}(\mathbb{R}^n)$ będzie takie, że $p_- > s$. Wtedy istnieje stała $C > 0$ taka, że dla każdej funkcji $f \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ zachodzi nierówność

$$||\mathcal{M}_s f||_{p(\cdot)} \leqslant \left(\frac{Cp_-}{p_- - s} \right)^{\frac{1}{s}} ||f||_{p(\cdot)} ,$$

gdzie

$$\mathcal{M}_s f(x) := \sup_{r>0} \left(\fint_{B(x,r)} |f(y)|^s \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{s}}$$

oznacza rodzinę funkcji maksymalnych Hardy'ego-Littlewooda.

Twierdzenie 2.8 uogólniliśmy na przestrzenie mieszane Lebesgue'a następująco.

Twierdzenie 2.16 (M. Dymek, P. Górka, 2021). Niech $p \in \mathcal{P}_0^{\log}(\mathbb{R}^n)$ i $q \in \mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n)$ będą takie, że $p_+ < +\infty$ and $q_+ < +\infty$. Wówczas rodzina $\mathcal{F} \subset \ell^{q(\cdot)}(L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n))$ jest prezwarta w $\ell^{q(\cdot)}(L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n))$ wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są warunki:

(i) rodzina $\mathcal{F}$ jest ograniczona w $\ell^{q(\cdot)}(L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n))$;

(ii)

$$\forall_{\varepsilon>0} \, \exists_{K\in\mathbb{N}} \, \forall_{f\in\mathcal{F}} \, \sum_{j=K+1}^{\infty} \left|\left| |f_j|^{q(\cdot)} \right|\right|_{\frac{p(\cdot)}{q(\cdot)}} \leqslant \varepsilon;$$

(iii)

$$\forall_{j\in\mathbb{N}} \, \exists_{0<s<p_-} \, \lim_{r\to 0^+} \sup_{f\in\mathcal{F}} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\fint_{B(x,r)} |f_j(x) - f_j(y)|^s \, \mathrm{d}y \right)^{\frac{p(x)}{s}} \mathrm{d}x = 0;$$

(iv)

$$\forall_{j\in\mathbb{N}} \, \lim_{R\to+\infty} \sup_{f\in\mathcal{F}} \int_{\mathbb{R}^n\setminus B(0,R)} |f_j(x)|^{p(x)} \, \mathrm{d}x = 0.$$

Dowód. Pokażemy najpierw, że warunki (i) – (iv) implikują prezwartość $\mathcal{F}$. Przypuśćmy, że punkty (i) – (iv) są spełnione. Ustalmy ciąg $\left(f^k\right) \subset \mathcal{F}$. Pokażemy, że ciąg $\left(f^k\right)$ ma podciąg zbieżny.

W pierwszym kroku wykażemy, że dla każdego $j \in \mathbb{N}$ ciąg $\left(f_j^k\right)_{k=1}^{\infty}$ jest ograniczony w przestrzeni $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$. Z warunku (i) wynika, że istnieje $M \in \mathbb{R}$ takie, że

$$\left|\left|f^k\right|\right|_{\ell^{q(\cdot)}(L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n))} \leqslant M$$

dla każdego $k \in \mathbb{N}$. Ustalmy $j \in \mathbb{N}$. Z lematu 2.11 mamy

$$\left\|f_j^k\right\|_{p(\cdot)} \leqslant \left\|f^k\right\|_{\ell^{q(\cdot)}(L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n))} \leqslant M,$$

co oznacza, że ciąg $\left(f_j^k\right)_{k=1}^{\infty}$ jest ograniczony w $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$.

Teraz, dla każdego $j \in \mathbb{N}$ zdefiniujmy zbiór

$$K_j := \overline{\left\{f_j^k \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n) : k \in \mathbb{N}\right\}},$$

gdzie linia nad zbiorem oznacza domknięcie w topologii przestrzeni $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$. Z twierdzenia 2.8 wynika, że zbiory $(K_j)_{j=1}^{\infty}$ są zwarte w $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$. Teraz na mocy twierdzenia Tichonowa produkt

$$\prod_{j \in \mathbb{N}} K_j$$

jest przestrzenią zwartą. Można stąd wywnioskować, że istnieje rosnący ciąg $(k_l) \subset \mathbb{N}$ oraz ciąg funkcji mierzalnych $(f_j) \subset L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ taki, że dla $j \in \mathbb{N}$ mamy

$$f_j^{k_l} \xrightarrow{l \to \infty} f_j \text{ w przestrzeni } L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n).$$

Niech $f = (f_j)$. Wykażemy, że

$$f^{k_l} \xrightarrow{l \to \infty} f \text{ w przestrzeni } \ell^{q(\cdot)}(L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)).$$

Od teraz dla uproszczenia poprzez $\left(f^k\right)$ będziemy oznaczać podciąg $\left(f^{k_l}\right)$. Weźmy $\varepsilon \in (0,1)$. Wystarczy pokazać, że

$$\rho_{\ell^{q(\cdot)}(L^{p(\cdot)})}\left(\frac{f^k - f}{\varepsilon}\right) \leqslant 1$$

dla dostatecznie dużych $k \in \mathbb{N}$. Z warunku (ii) wynika, że istnieje $K \in \mathbb{N}$ takie, że

$$\sum_{j=K+1}^{\infty} \left\|\left|f_j^k\right|^{q(\cdot)}\right\|_{\frac{p(\cdot)}{q(\cdot)}} \leqslant \frac{\varepsilon^{q_+}}{2^{q_+ + 2}Q},$$

gdzie $Q \geqslant 1$ jest stałą taką, że dla $u, v \in L^{\frac{p(\cdot)}{q(\cdot)}}(\mathbb{R}^n)$ zachodzi nierówność

$$||u+v||_{\frac{p(\cdot)}{q(\cdot)}} \leqslant Q\left(||u||_{\frac{p(\cdot)}{q(\cdot)}} + ||v||_{\frac{p(\cdot)}{q(\cdot)}}\right).$$

Teraz

$$\rho_{\ell^{q(\cdot)}(L^{p(\cdot)})}\left(\frac{f^k - f}{\varepsilon}\right) = \sum_{j=1}^{K} \left\|\left|\frac{f_j^k - f_j}{\varepsilon}\right|^{q(\cdot)}\right\|_{\frac{p(\cdot)}{q(\cdot)}} + \sum_{j=K+1}^{\infty} \left\|\left|\frac{f_j^k - f_j}{\varepsilon}\right|^{q(\cdot)}\right\|_{\frac{p(\cdot)}{q(\cdot)}}.$$

Niech

$$L := \sum_{j=K+1}^{\infty} \left\|\left|\frac{f_j^k - f_j}{\varepsilon}\right|^{q(\cdot)}\right\|_{\frac{p(\cdot)}{q(\cdot)}}.$$

Szacujemy wyrażenie L jak następuje

$$
\begin{aligned}
L &\leqslant \sum_{j=K+1}^{\infty} \left\| 2^{q_+} \left(\left| \frac{f_j^k}{\varepsilon} \right|^{q(\cdot)} + \left| \frac{f_j}{\varepsilon} \right|^{q(\cdot)} \right) \right\|_{\frac{p(\cdot)}{q(\cdot)}} \leqslant \\
&\overset{(1)}{\leqslant} 2^{q_+} Q \left(\sum_{j=K+1}^{\infty} \left\| \left| \frac{f_j^k}{\varepsilon} \right|^{q(\cdot)} \right\|_{\frac{p(\cdot)}{q(\cdot)}} + \sum_{j=K+1}^{\infty} \left\| \left| \frac{f_j}{\varepsilon} \right|^{q(\cdot)} \right\|_{\frac{p(\cdot)}{q(\cdot)}} \right) \leqslant \\
&\leqslant \frac{2^{q_+} Q}{\varepsilon^{q_+}} \left(\sum_{j=K+1}^{\infty} \left\| \left| f_j^k \right|^{q(\cdot)} \right\|_{\frac{p(\cdot)}{q(\cdot)}} + \sum_{j=K+1}^{\infty} \left\| |f_j|^{q(\cdot)} \right\|_{\frac{p(\cdot)}{q(\cdot)}} \right) = \\
&= \frac{2^{q_+} Q}{\varepsilon^{q_+}} \left(\sum_{j=K+1}^{\infty} \left\| \left| f_j^k \right|^{q(\cdot)} \right\|_{\frac{p(\cdot)}{q(\cdot)}} + \sum_{j=K+1}^{\infty} \inf \left\{ \lambda_j > 0 : \rho_{p(\cdot)} \left(\frac{f_j}{\lambda_j^{\frac{1}{q(\cdot)}}} \right) \leqslant 1 \right\} \right) \leqslant \\
&\overset{(2)}{\leqslant} \frac{2^{q_+} Q}{\varepsilon^{q_+}} \left(\sum_{j=K+1}^{\infty} \left\| \left| f_j^k \right|^{q(\cdot)} \right\|_{\frac{p(\cdot)}{q(\cdot)}} + \sum_{j=K+1}^{\infty} \liminf_{k\to\infty} \inf \left\{ \lambda_j(k) > 0 : \rho_{p(\cdot)} \left(\frac{f_j^k}{\lambda_j(k)^{\frac{1}{q(\cdot)}}} \right) \leqslant 1 \right\} \right) \leqslant \\
&\overset{(3)}{\leqslant} \frac{2^{q_+} Q}{\varepsilon^{q_+}} \left(\sum_{j=K+1}^{\infty} \left\| \left| f_j^k \right|^{q(\cdot)} \right\|_{\frac{p(\cdot)}{q(\cdot)}} + \liminf_{k\to\infty} \sum_{j=K+1}^{\infty} \inf \left\{ \lambda_j(k) > 0 : \rho_{p(\cdot)} \left(\frac{f_j^k}{\lambda_j(k)^{\frac{1}{q(\cdot)}}} \right) \leqslant 1 \right\} \right) = \\
&= \frac{2^{q_+} Q}{\varepsilon^{q_+}} \left(\sum_{j=K+1}^{\infty} \left\| \left| f_j^k \right|^{q(\cdot)} \right\|_{\frac{p(\cdot)}{q(\cdot)}} + \liminf_{k\to\infty} \sum_{j=K+1}^{\infty} \left\| |f_j^k|^{q(\cdot)} \right\|_{\frac{p(\cdot)}{q(\cdot)}} \right) \leqslant \\
&\leqslant \frac{2^{q_+} Q}{\varepsilon^{q_+}} \cdot \frac{\varepsilon^{q_+}}{2^{q_+ + 1} Q} = \frac{1}{2},
\end{aligned}
$$

gdzie (1) wynika z nierówności trójkąta dla kwazi-normy $\|\cdot\|_{\frac{p(\cdot)}{q(\cdot)}}$, przejście (2) to zastosowanie lematu 2.12 zaś (3) wynika z lematu Fatou dla miary liczącej. Zatem dla każdego $k \in \mathbb{N}$ mamy

$$
\rho_{\ell^{q(\cdot)}(L^{p(\cdot)})} \left(\frac{f^k - f}{\varepsilon} \right) \leqslant \sum_{j=1}^{K} \left\| \left| \frac{f_j^k - f_j}{\varepsilon} \right|^{q(\cdot)} \right\|_{\frac{p(\cdot)}{q(\cdot)}} + \frac{1}{2}.
$$

By zakończyć dowód pierwszej części twierdzenia, wystarczy dowieść, że dla $j \in \{1, \ldots, K\}$ mamy

$$
\left\| \left| \frac{f_j^k - f_j}{\varepsilon} \right|^{q(\cdot)} \right\|_{\frac{p(\cdot)}{q(\cdot)}} \xrightarrow{k\to\infty} 0.
$$

Ustalmy $j \in \{1, \ldots, K\}$ i $\eta \in (0,1)$. Szacujemy

$$
\rho_{\frac{p(\cdot)}{q(\cdot)}} \left(\left| \frac{f_j^k - f_j}{\varepsilon} \right|^{q(\cdot)} \cdot \frac{1}{\eta} \right) \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{f_j^k(x) - f_j(x)}{\varepsilon \eta^{\frac{1}{q_-}}} \right|^{p(x)} \mathrm{d}x = \rho_{p(\cdot)} \left(\frac{f_j^k - f_j}{\varepsilon \eta^{\frac{1}{q_-}}} \right).
$$

Skoro $f_j^k \xrightarrow{k\to\infty} f_j$ w przestrzeni $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$, dla odpowiednio dużych $k \in \mathbb{N}$ mamy

$$
\rho_{\frac{p(\cdot)}{q(\cdot)}} \left(\left| \frac{f_j^k - f_j}{\varepsilon} \right|^{q(\cdot)} \cdot \frac{1}{\eta} \right) \leqslant \rho_{p(\cdot)} \left(\frac{f_j^k - f_j}{\varepsilon \eta^{\frac{1}{q_-}}} \right) \leqslant 1,
$$

co dowodzi, że

$$
\left\| \left| \frac{f_j^k - f_j}{\varepsilon} \right|^{q(\cdot)} \right\|_{\frac{p(\cdot)}{q(\cdot)}} \xrightarrow{k\to\infty} 0.
$$

Zatem dla dostatecznie dużych $k \in \mathbb{N}$ mamy

$$\rho_{\ell^{q(\cdot)}(L^{p(\cdot)})}\left(\frac{f^k - f}{\varepsilon}\right) \leqslant 1,$$

co oznacza, że $f^k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} f$ w $\ell^{q(\cdot)}(L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n))$. Dowodzi to prezwartości rodziny $\mathcal{F}$.

Teraz przypuśćmy, że rodzina $\mathcal{F}$ jest prezwarta. Pokażemy konieczność warunków (i) – (iv).

(i) Oczywiste.

(ii) Ustalmy $\varepsilon \in (0,1)$. Niech

$$\overline{\varepsilon} := \frac{\varepsilon}{2^{q_+ + 1}Q},$$

gdzie Q raz jeszcze jest stałą z nierówności trójkąta dla kwazi-normy $||\cdot||_{\frac{p(\cdot)}{q(\cdot)}}$. Skoro przestrzeń mieszana Lebesgue'a jest przestrzenią kwazi-Banacha, to pojęcia prezwartości i całkowitej ograniczoności jej podzbiorów są równoważne. Z całkowitej ograniczoności rodziny $\mathcal{F}$ wynika, że istnieją $f^1, \ldots, f^k \in \mathcal{F}$ takie, że

$$\mathcal{F} \subset \bigcup_{i=1}^{k} B\left(f^i, \overline{\varepsilon}^{\frac{1}{q_-}}\right),$$

gdzie $B\left(f^i, \overline{\varepsilon}^{\frac{1}{q_-}}\right)$ są kulami otwartymi w $\ell^{q(\cdot)}(L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n))$. Skoro $f_i \in \ell^{q(\cdot)}(L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n))$, to istnieje $K \in \mathbb{N}$ takie, że

$$\sum_{j=K+1}^{\infty} \left|\left||f_j^i|^{q(\cdot)}\right|\right|_{\frac{p(\cdot)}{q(\cdot)}} < \overline{\varepsilon}$$

dla $i = 1, \ldots, K$. Niech $f \in \mathcal{F}$. Wtedy istnieje $i \in \{1, \ldots, K\}$ takie, że

$$\left|\left|f - f^i\right|\right|_{\ell^{q(\cdot)}(L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n))} < \overline{\varepsilon}^{\frac{1}{q_-}}.$$

Stąd wynika, że

$$\rho_{\ell^{q(\cdot)}(L^{p(\cdot)})}\left(\frac{f - f^i}{\overline{\varepsilon}^{\frac{1}{q_-}}}\right) \leqslant 1.$$

Z nierówności trójkąta szacujemy

$$\begin{aligned}
\sum_{j=K+1}^{\infty} \left|\left||f_j|^{q(\cdot)}\right|\right|_{\frac{p(\cdot)}{q(\cdot)}} &\leqslant 2^{q_+}Q\left(\sum_{j=K+1}^{\infty} \left|\left||f_j - f_j^i|^{q(\cdot)}\right|\right|_{\frac{p(\cdot)}{q(\cdot)}} + \sum_{j=K+1}^{\infty} \left|\left||f_j^i|^{q(\cdot)}\right|\right|_{\frac{p(\cdot)}{q(\cdot)}}\right) \leqslant \\
&\leqslant 2^{q_+}Q\left(\sum_{j=1}^{\infty} \left|\left||f_j - f_j^i|^{q(\cdot)}\right|\right|_{\frac{p(\cdot)}{q(\cdot)}} + \sum_{j=K+1}^{\infty} \left|\left||f_j^i|^{q(\cdot)}\right|\right|_{\frac{p(\cdot)}{q(\cdot)}}\right) \leqslant \\
&\leqslant 2^{q_+}Q\left(\overline{\varepsilon}\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\overline{\varepsilon}} \left|\left||f_j - f_j^i|^{q(\cdot)}\right|\right|_{\frac{p(\cdot)}{q(\cdot)}} + \overline{\varepsilon}\right) \leqslant \\
&\leqslant 2^{q_+}Q\left(\overline{\varepsilon}\sum_{j=1}^{\infty} \left|\left|\left|\frac{f_j - f_j^i}{\overline{\varepsilon}^{\frac{1}{q_-}}}\right|^{q(\cdot)}\right|\right|_{\frac{p(\cdot)}{q(\cdot)}} + \overline{\varepsilon}\right) = \\
&= 2^{q_+}Q\left(\overline{\varepsilon}\mathcal{I}_{\ell^{q(\cdot)}(L^{p(\cdot)})}\left(\frac{f - f^i}{\overline{\varepsilon}^{\frac{1}{q_-}}}\right) + \overline{\varepsilon}\right) \leqslant \\
&\leqslant 2^{q_+ + 1}Q\overline{\varepsilon} = \varepsilon,
\end{aligned}$$

co dowodzi (ii).

Teraz udowodnimy (iii) and (iv). Niech $\varepsilon \in (0,1)$ oraz $0 < s < p_-$ będą takie, że

$$\overline{\varepsilon} := \left(\frac{p_- - s}{Cp_-}\right)^{\frac{1}{s}} \varepsilon < 1,$$

gdzie C jest stałą z wniosku 2.15.1. Przypuśćmy, że $(f^i)_{i=1}^N$ jest $\overline{\varepsilon}$-siecią w $\mathcal{F}$. Dla $f \in \mathcal{F}$, bierzemy $i \in \{1, \dots, N\}$, dla którego

$$\left\|f - f^i\right\|_{\ell^{q(\cdot)}(L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n))} < \overline{\varepsilon}.$$

Niech $j \in \mathbb{N}$. Z lematu 2.11 mamy

$$\left\|f_j - f_j^i\right\|_{p(\cdot)} \leqslant \left\|f - f^i\right\|_{\ell^{q(\cdot)}(L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n))} < \overline{\varepsilon}.$$

Ze stwierdzenia 2.13 wynika, że

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left|f_j(x) - f_j^i(x)\right|^{p(x)} \mathrm{d}x \leqslant \overline{\varepsilon}^{p_-}.$$

(iii) Szacujemy

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \left(\fint_{B(x,r)} |f_j(x) - f_j(y)|^s \,\mathrm{d}y\right)^{\frac{p(x)}{s}} \mathrm{d}x &\leqslant 2^{\frac{p_+}{s}+s} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\fint_{B(x,r)} \left|f_j(x) - f_j^i(x)\right|^s \mathrm{d}jy\right)^{\frac{p(x)}{s}} \mathrm{d}x+ \\
&+ 2^{\frac{p_+}{s}+s} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\fint_{B(x,r)} \left|f_j^i(x) - f_j(y)\right|^s \mathrm{d}y\right)^{\frac{p(x)}{s}} \mathrm{d}x \leqslant \\
&\leqslant 2^{\frac{p_+}{s}+s} I_1(j) + 4^{\frac{p_+}{s}+s} I_2(j) + 4^{\frac{p_+}{s}+s} I_3(j),
\end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
I_1(j) &:= \int_{\mathbb{R}^n} \left|f_j(x) - f_j^i(x)\right|^{p(x)} \mathrm{d}x, \\
I_2(j) &:= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\fint_{B(x,r)} \left|f_j^i(x) - f_j^i(y)\right|^s \mathrm{d}y\right)^{\frac{p(x)}{s}} \mathrm{d}x, \\
I_3(j) &:= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\fint_{B(x,r)} \left|f_j^i(y) - f_j(y)\right|^s \mathrm{d}y\right)^{\frac{p(x)}{s}} \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

By zakończyć dowód (iii) wystarczy oszacować $I_1(j), I_2(j), I_3(j)$.

Wiemy już, że $I_1(j) < \overline{\varepsilon}^{p_-}$. Teraz oszacujemy $I_2(j)$. Z wniosku 2.15.1 otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\left(\fint_{B(x,r)} \left|f_j^i(x) - f_j^i(y)\right|^s \mathrm{d}y\right)^{\frac{p(x)}{s}} &\leqslant 2^s \left(\left|f_j^i(x)\right|^s + \fint_{B(x,r)} \left|f_j^i(y)\right|^s \mathrm{d}y\right)^{\frac{p(x)}{s}} \leqslant \\
&\leqslant 2^{\frac{p_+}{s}+s} \left(\left|f_j^i(x)\right|^{p(x)} + \left(\fint_{B(x,r)} \left|f_j^i(y)\right|^s \mathrm{d}y\right)^{\frac{p(x)}{s}}\right) \leqslant \\
&\leqslant 2^{\frac{p_+}{s}+s} \left(\left|f_j^i(x)\right|^{p(x)} + \left[\mathcal{M}_s f_j^i(x)\right]^{p(x)}\right) \in L^1(\mathbb{R}^n).
\end{aligned}$$

Skoro $\left|f_j^i\right|^s \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, możemy użyć twierdzenia Lebesgue'a o różniczkowaniu całki by otrzymać

$$\fint_{B(x,r)} \left|f_j^i(x) - f_j^i(y)\right|^s \mathrm{d}y \overset{r\to 0^+}{\longrightarrow} 0$$

dla prawie wszystkich $x \in \mathbb{R}^n$. Zatem z twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej $I_2(j) < \varepsilon$ dla odpowiednio małych $r > 0$.

By zakończyć dowód (iii), oszacujemy $I_3(j)$. Z wniosku 2.15.1 mamy

$$\left\|\mathcal{M}_s\left(f_j^i - f_j\right)\right\|_{p(\cdot)} \leqslant \left(\frac{Cp_-}{p_- - s}\right)^{\frac{1}{s}} \left\|f_j^i - f_j\right\|_{p(\cdot)} \leqslant \left(\frac{Cp_-}{p_- - s}\right)^{\frac{1}{s}} \left(\frac{p_- - s}{Cp_-}\right)^{\frac{1}{s}} \varepsilon = \varepsilon < 1.$$

Z kolei ze stwierdzenia 2.13 wynika, że

$$I_3(j) \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \left(\mathcal{M}_s\left(\left|f_j^i - f_j\right|\right)(x)\right)^{p(x)} \mathrm{d}x \leqslant \left\|\mathcal{M}_s\left(\left|f_j^i - f_j\right|\right)\right\|_{p(\cdot)}^{p_-} \leqslant \varepsilon^{p_-},$$

co kończy dowód (iii).

(iv) Ustalmy ponownie $j \in \mathbb{N}$. Dla $i = 1, \ldots, N$, wybieramy R_i takie, że

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,R_i)} \left|f_j^i(x)\right|^{p(x)} \mathrm{d}x < \varepsilon.$$

Wtedy dla $R := \max\{R_i : i = 1, \ldots, N\}$ mamy

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,R)} |f_j(x)|^{p(x)} \mathrm{d}x &\leqslant 2^{p_+} \int_{\mathbb{R}^n} \left|f_j^i(x) - f_j(x)\right|^{p(x)} \mathrm{d}x + 2^{p_+} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,R_i)} \left|f_j^i(x)\right|^{p(x)} \mathrm{d}x \leqslant \\ &\leqslant 2^{p_+}\left(\overline{\varepsilon}^{p_-} + \varepsilon\right),\end{aligned}$$

co dowodzi (iv). □

Uwaga 2.17. Podobnie jak w twierdzeniu 2.8, założenie o logarytmicznie-hölderowskiej ciągłości wykładnika p było istotne tylko w dowodzie konieczności warunków (i) – (iv). Wynika stąd, że zachodzi następujące twierdzenie.

Twierdzenie 2.18 (M. Dymek, P. Górka, 2021). Niech $p \in \mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n)$ i $q \in \mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n)$ będą wykładnikami takimi, że $p_+ < +\infty$ and $q_+ < +\infty$. Przypuśćmy, że rodzina $\mathcal{F} \subset \ell^{q(\cdot)}(L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n))$ spełnia następujące warunki:

(i) rodzina $\mathcal{F}$ jest ograniczona w $\ell^{q(\cdot)}(L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n))$;

(ii)
$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{K\in\mathbb{N}}\ \forall_{f\in\mathcal{F}} \sum_{j=K+1}^{\infty} \left\||f_j|^{q(\cdot)}\right\|_{\frac{p(\cdot)}{q(\cdot)}} \leqslant \varepsilon;$$

(iii)
$$\forall_{j\in\mathbb{N}}\ \exists_{0<s<p_-} \lim_{r\to 0^+} \sup_{f\in\mathcal{F}} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\fint_{B(x,r)} |f_j(x) - f_j(y)|^s \mathrm{d}y\right)^{\frac{p(x)}{s}} \mathrm{d}x = 0;$$

(iv)
$$\forall_{j\in\mathbb{N}} \lim_{R\to+\infty} \sup_{f\in\mathcal{F}} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,R)} |f_j(x)|^{p(x)} \mathrm{d}x = 0.$$

Wtedy rodzina $\mathcal{F}$ jest prezwarta w topologii przestrzeni $\ell^{q(\cdot)}(L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n))$.

Na zakończenie poruszymy temat hipotezy dotyczącej prawdziwości twierdzenia typu Sudakova w przestrzeniach mieszanych Lebesgue'a. Przypomnijmy, że twierdzenie Riesza-Kołmogorowa charakteryzujące zbiory prezwarte w przestrzeni $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leqslant p < +\infty$, doczekało się następującego uogólnienia.

Twierdzenie 2.19 (Sudakov, 1957). Niech $1 \leqslant p < +\infty$. Rodzina $\mathcal{F} \subset L^p(\mathbb{R}^n)$ jest całkowicie ograniczona wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są warunki

(i) dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że dla każdego $f \in \mathcal{F}$ i $y \in \mathbb{R}^n$ takich, że $|y| < \delta$ zachodzi
$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x+y) - f(x)|^p \,\mathrm{d}x < \varepsilon.$$

(ii) dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $R > 0$ takie, że dla każdego $f \in \mathcal{F}$ zachodzi
$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,R)} |f(x)|^p \,\mathrm{d}x \leqslant \varepsilon;$$

Udowodniono także, że operator przesunięcia w warunku (i) z ostatniego twierdzenia można zastąpić uśrednieniem po kuli.

Twierdzenie Sudakova mówi, że warunek ograniczoności rodziny $\mathcal{F}$ z twierdzenia Riesza-Kołmogorowa można pominąć. Narzuca się oczywiste pytanie, czy można uzyskać analogiczny rezultat w przestrzeniach mieszanych Lebesgue'a. Na dzień dzisiejszy jest to pytanie otwarte.

Literatura

[1] T. Adamowicz, P. Harjulehto and P. Hästö, Maximal operator in variable exponent Lebesgue spaces on unbounded quasimetric measure spaces, Math. Scand. 116 (2015), no. 1, 5–22.

[2] A. Almeida, P. Hästö, Besov spaces with variable smoothness and integrability, Journal of Functional Analysis, 258 (2010), 1628-1655.

[3] R. Bandaliyev, P. Górka, Relatively compact sets in variable-exponent Lebesgue spaces, Banach Journal of Mathematical Analysis, 12 (2018), 331-346.

[4] A. Ghorbanalizadeh, P. Górka, Completeness and separability of the spaces of variable integrability and summability, Proceedings of the American Mathematical Society.

[5] H. Hanche-Olsen, H. Holden, E. Malinnikova, An improvement of the Kolmogorov–Riesz compactness theorem, Expositiones Mathematicae (2018)

[6] H. Kempka, J. Vybíral, A note on the spaces of variable integrability and summability of Almeida and Hästö, Proceedings of the American Mathematical Society 141 (2013), 3207-3212.